XLIII Olimpiada Matemática Española
Fase Local de Burgos

Tarde del viernes 19 de enero de 2007

Problema 1.

Demostrar que es imposible obtener un cubo yuxtaponiendo tetraedros regulares, todos del mismo tamaño.

Solución.

Un tetraedro regular de lado *c* tiene volumen $\frac{\sqrt{2}}{12}c^3$ y cada una de sus caras tiene área $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Supongamos (sin perder generalidad) que un cubo de lado 1 se puede obtener uniendo N tetraedros regulares de lado *c*. Entonces se satisface

$$Nc^3\frac{\sqrt{2}}{12}=1$$

Por otro lado, cada cara del cubo estará formada por un número entero, digamos *k*, de caras de tetraedros. Como que el área de una cara del cubo es 1, tenemos

$$kc^2\frac{\sqrt{3}}{4}=1$$

Dividiendo la primera igualdad por la segunda podemos despejar *c*

$$\frac{N}{k}c\frac{4\sqrt{2}}{12\sqrt{3}}=1 \Rightarrow c=\frac{3\sqrt{6}k}{2N}$$

y en particular deducimos que $c^2=\frac{27k^2}{2N^2}$ es un número racional.

Pero esto es incompatible con la segunda de las ecuaciones. ■

Problema 2.

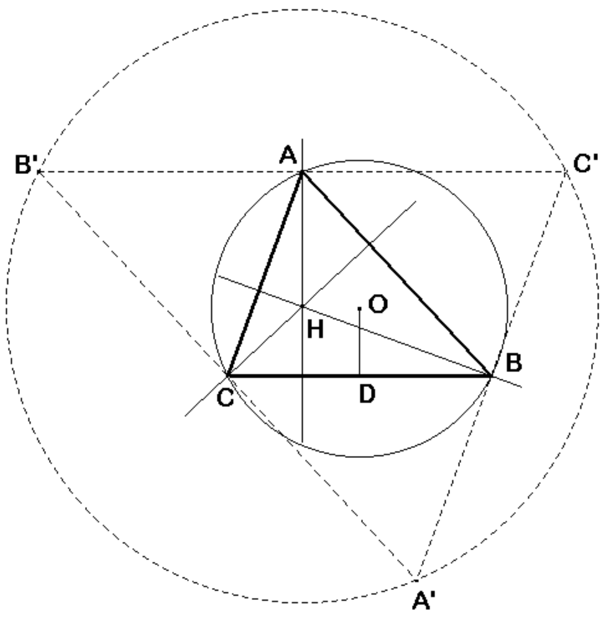
Demostrar que, en un triángulo, la distancia de un vértice cualquiera al ortocentro es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto a ese vértice.

Solución.

Sea el triángulo ABC con ortocentro H y circuncentro O.
Si por cada vértice de ABC trazamos una paralela al lado opuesto obtenemos el triángulo A'B'C' que es semejante al ABC con razón de semejanza 2 (CB es segmento medio de A'B'C')

La altura AH es mediatriz del lado B'C' y análogamente ocurre con las otras alturas, por lo que H es el circuncentro del triángulo A'B'C'.

Por tanto, la distancia de cada circuncentro al lado semejante en el triángulo correspondiente, estará en la razon de 2, es decir :
d(H, B'C') = HA = 2 d(O, CB) = 2.OD ■



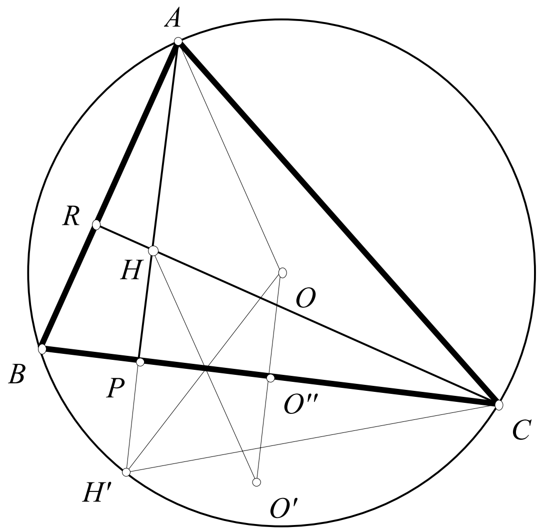
Otra solución:

Sean el triángulo *ABC*, su ortocentro *H* y su circuncentro *O*. Sean *H'* y *O'* sus simétricos respecto del lado *BC*.

i) Puesto que los triángulos *BPA* y *BCR* son rectángulos y comparten el ángulo *CBA*, son semejantes y, por lo tanto los ángulos $\angle BAH' = \angle HCP$.
Pero por ser *H*' simétrico de *H*,

$$\angle HCP = \angle PCH' \text{ y } \angle BAH' = \angle BCH'$$

Cosa que prueba que H' está sobre la circunferencia circunscrita al triánguloABC.



ii) Nuevamente por ser *H*' simétrico de *H*, $\angle OH'H = \angle H'HO'$ y, por ser *HH*' y *OO*' dos paralelas cortadas por la secante *HO*', $\angle H'HO' = \angle OO'H$, obteniendo

$$\angle OH'H = \angle OO'H$$

iii) Pero *OA* y *OH*' sor radios de la circunferencia circunscrita y, en consecuencia, el triángulo *H'OH* es isósceles, por lo que $\angle OH'H = \angle HAO$ y, finalmente,

$$\angle OO'H = \angle HAO$$

y el cuadrilátero *AHO'O* es un paralelogramo. Resulta:

$$AH = OO' = 2OO''. \blacksquare$$

Problema 3.

Hallar todas las soluciones reales de la ecuación

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-z-x} = 1$$

Solución.
Aplicando que las medias aritmética son mayores o iguales que las geométricas resulta

$$3^{x^2-x-y} + 3^{y^2-y-z} + 3^{z^2-x-x} \geq 3\sqrt[3]{3^{x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z}} = 3^{\frac{1}{3}\left(x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z\right)+1}$$

$$= 3^{\frac{1}{3}\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right]} \geq 3^0 = 1$$

La igualdad se verifica cuando $x = y = z = 1$. Por tanto, la única solución es $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y hemos terminado. $\blacksquare$

Mañana del sábado 20 de enero de 2007

Problema 4.

Para cuatro puntos no coplanarios, un plano ecualizador es un plano tal que las distancias respectivas de cada uno de los puntos a ese plano son todas iguales. Dado un conjunto de cuatro puntos no coplanarios, ¿cuántos planos ecualizadores hay?

Solución:
Sean A, B, C y D cuatro puntos no coplanarios. Sea p un plano ecualizador de esos puntos y examinemos las posibilidades:

i) Si A, B, C y D están en el mismo semiespacio en que p divide al espacio, está claro que uno de los dos planos paralelos a p, a la misma distancia que están los cuatro puntos de p, contiene a todos esos puntos, contra la hipótesis de no coplanariedad. Por lo tanto, los puntos no pueden estar todos en el mismo lado del plano ecualizador.

ii) Sea A en un lado del plano y B, C y D en el otro. Es obvio que p es paralelo al plano q determinado por los puntos B, C y D y corta al segmento que proyecta A sobre el plano q en su punto medio. Por lo tanto, en esas condiciones, el plano ecualizador existe y es único. Ahora, tomando cada vez uno cualquiera de los otros puntos como "punto aislado" en un lado del plano, obtenemos otros tantos planos ecualizadores. En consecuencia, con un punto en un lado y los otros tres en el otro, hay exactamente cuatro planos ecualizadores.

iii) Sean ahora A y B en un lado del plano p y C y D en el otro. Consideremos el plano r que contiene a A y B y es paralelo al segmento CD y el plano s que contiene a C y D y es paralelo al segmento AB.
Entonces, los planos r y s son paralelos y el plano ecualizador p es el plano equidistante de los planos r y s, que también está determinado de forma única. Dado el punto A, la elección de su "pareja" en uno de los lados de p determina otros tantos planos ecualizadores, tres en total.
Así, pues, para cuatro puntos no coplanarios dados, hay exactamente siete planos ecualizadores. ■

Problema 5.

Encontrar todas las soluciones enteras posibles, *x* e *y*, de la ecuación:

$$p(x+y)=xy$$

siendo *p* un cierto número primo.

Solución:
De $p(x+y)=xy$ y del hecho que p es un número primo se deduce que p divide a x o a y. Puesto que, en el enunciado, los papeles de x e y son completamente simétricos, se puede, sin pérdida de generalidad, suponer que p divide a x y que, en consecuencia, hay un número k tal que

$$x=kp$$

Entonces, la ecuación propuesta queda

$$p(kp+y)=kpy$$

o sea,

$$kp+y=ky$$

Ahora, unas cuantas manipulaciones:

$$kp + y = ky \Rightarrow 0 = ky - kp - y = k(y-p) - y \Rightarrow p = k(y-p) - y + p = (k-1)(y-p)$$

Ponen de manifiesto que $k - 1$ es un divisor de p y, dado que p es primo, hay cuatro posibilidades:

i) Que $k-1=-p$. Obtenemos que $k=1-p$ y, por lo tanto,

$$x = (1-p)p, \quad y = p-1$$

ii) Que $k-1=-1$. Resulta que $k=0$, o sea,

$$x = 0, \quad y = 0$$

iii) Que k -1 $= p$. Entonces $k = p+1$ y resulta:

$$x = p(p+1), \quad y = p+1$$

iv) Que k -1 = 1. Resulta que $k = 2$, o sea,

$$x = 2p\ ,\ y = 2p$$

que son todas las posibles soluciones de la ecuación propuesta. ■

Problema 6.

Sea $a_n = 1+n^3$ la sucesión {2, 9, 28, 65, . . .} y $\delta_n = \mathrm{mcd}(a_{n+1}, a_n)$ Hallar el máximo valor que puede tomar δ_n.

Solución:

δ_n divide a a_{n+1} y a a_n , y por tanto a su diferencia $b_n = a_{n+1} - a_n = 3n^2 + 3n + 1$.

También divide a $c_n = 3a_n - nb_n = 3 - n - 3n^2$ y a la suma $d_n = b_n + c_n = 4 + 2n$.

Pero entonces δ_n también divide a $e_n = 2b_n - 3nd_n = 2 - 6n$.

Finalmente, divide a $3d_n + e_n = 14$.

Pero $b_n = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n+1) + 1$ es un número impar, luego δ_n solamente puede ser 1 o 7.

El máximo es 7 ya que mcd (5^3 + 1, 6^3 + 1) = 7. ■